

XXIª OLIMPIADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2015



Duración de la prueba: 3 horas.

Cada problema vale 10 puntos.

No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.

Justifica cada una de tus respuestas.

Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

PROBLEMA 1

El maestro pensó en secreto un número S de tres dígitos. Los alumnos A , B , C y D intentaron adivinarlo, diciendo, respectivamente, 541, 837, 291 y 846. El maestro les dijo, “Cada uno de ustedes acertó exactamente un dígito de S y en la posición correcta”. ¿Cuál es el número S ?

PROBLEMA 2

Son dadas 6 monedas indistinguibles, 4 son auténticas, todas del mismo peso, y 2 son falsas, una es más liviana que las auténticas y la otra, más pesada que las auténticas. Las dos falsas pesan, en conjunto, lo mismo que dos monedas auténticas. Hallar dos monedas auténticas utilizando dos veces una balanza de dos platos, sin pesas.

ACLARACIÓN: Una balanza de dos platos solo informa si el plato izquierdo pesa más, igual o menos que el derecho.

PROBLEMA 3

En el cuadrilátero $ABCD$, el ángulo C es el triple del ángulo A . Sean P en el lado AB tal que $DPA = 90^\circ$ y Q en el lado AD tal que $BQA = 90^\circ$. Los segmentos DP y BQ se cortan en O de modo que $BO = CO = DO$. Calcular la medida de los ángulos A y C .

PROBLEMA 4

Decimos que un número es *supersticioso* cuando es igual a 13 veces la suma de sus cifras. Encontrar todos los números supersticiosos.

PROBLEMA 5

En una casa se reúnen veintiséis personas. Alicia es amiga de solo una persona, Bruno es amigo de dos personas, Carlos es amigo de tres, Daniel de cuatro, Elías de cinco, y así siguiendo cada persona es amiga de una persona más que la persona anterior, hasta llegar a Yvonne, la persona número veinticinco, que es amiga de todos. ¿De cuántas personas es amiga Zoila, la persona número veintiséis?

ACLARACIÓN: Si A es amigo de B entonces B es amigo de A .

XXI^a OLIMPIADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2015



Duración de la prueba: 3 horas.

Cada problema vale 10 puntos.

No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.

Justifica cada una de tus respuestas.

Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

PROBLEMA 1

Ana y Celia venden varios objetos y obtienen por cada objeto tantos euros como objetos vendieron. El dinero obtenido está constituido por algunos billetes de 10 euros y menos de 10 monedas de 1 euro.

Deciden repartir el dinero del siguiente modo: Ana toma un billete de 10 euros y después Celia, y así sucesivamente hasta que Ana toma el último billete de 10 euros, y Celia se lleva todas las monedas de 1 euro. ¿Cuántos euros más que Celia se llevó Ana? Dar todas las posibilidades.

PROBLEMA 2

Se tiene un tablero de 7×7 . Se desea pintar algunas de sus casillas de manera tal que cualquier subtablero de 3×3 tenga más casillas pintadas que sin pintar. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que se deben pintar? Mostrar una configuración con esa cantidad de casillas pintadas y explicar porqué no es posible con menos.

ACLARACIÓN: Un subtablero de 3×3 es un cuadrado formado por 9 casillas del tablero.

PROBLEMA 3

Sea $ABCDEFGHI$ un polígono regular de 9 lados. Los segmentos AE y DF se cortan en P . Demostrar que PG y AF son perpendiculares.

PROBLEMA 4

En una pizarra están escritos los primeros 510 enteros positivos: 1, 2, 3, ..., 510. Una *operación* consiste en borrar dos números cuya suma sea un número primo. ¿Cuál es el máximo número de operaciones seguidas que se puede hacer? Mostrar cómo se logra y explicar porqué no se puede hacer más operaciones.

PROBLEMA 5

Se tienen 65 puntos del plano. Se trazan todas las rectas que pasan por dos de ellos y se obtienen exactamente 2015 rectas distintas. Demostrar que al menos cuatro de los puntos están alineados.